Compito di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

27/7/2012

1. Data la funzione

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2(z^2 + 16\pi^2)}$$

indicarne gli zeri (precisandone l'ordine) e determinare le singolarità, classificandole e calcolando i corrispondenti residui. Non dimenticare la classificazione del punto all'infinito.

2. Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2 - x & -2 \le x \le -1 \\ x & -1 \le x \le 1 \\ 2 - x & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

3. Si vuole calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{e^{ax}}{1 + e^x}, \qquad 0 < a < 1$$

A tal fine:

1. prolungare nel piano complesso la funzione integranda, studiarne le singolarità e calcolare i corrispondenti residui;
2. individuare un opportuno percorso di integrazione nel campo complesso, che racchiuda un numero finito di singolarità polari, e calcolare l'integrale col teorema dei residui.

4. Sia A l'operatore in $L^2(a, b)$ con $0 < a < b$ tale che

$$(Af)(x) = \frac{i}{2}\left[\frac{d}{dx} + \frac{1}{x^4}\frac{d}{dx}x^4\right] f(x)$$

definito per ogni funzione f assolutamente continua con $f' \in L^2(a, b)$, e tale che

$$a^2 f(a) = b^2 f(b)$$

Determinare lo spettro di A.
Suggerimento: risolvere il problema agli autovalori con il cambio di funzione $f(x) = x^\alpha g(x)$, per un opportuno valore di α, da determinare. Assicurarsi che la trasformazione sia ben definita nell'intervallo di definizione della funzione.

5. Calcolare i primi tre coefficienti dello sviluppo della funzione

$$y = 1 - 2\sin^2 x$$

sui polinomi di Hermite. Si ricorda che i polinomi di Hermite formano una base su $L^2(\mathbb{R}, \exp(-x^2)\, dx)$ e che $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$. Trascurare ogni fattore di normalizzazione.

$y = \frac{\pi}{a}$

$e^{az} = e^{ax} e^{aiy}$